

Paper Type: Original Article

## Investigating Data Coverage Models for Input/Output Level and Improving the Efficiency of Organizations

Reza Tavakoli-Moghadam\*

Department of Industrial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran; tavakoli@ut.ac.ir.

**Citation:**



Tavakoli-Moghadam, R. (2023). Investigating data coverage models for input/output level and improving the efficiency of organizations. *Financial and banking strategic studies*, 1(4), 258-271.

Received: 16/11/2023

Reviewed: 14/12/2023

Revised: 09/01/2024

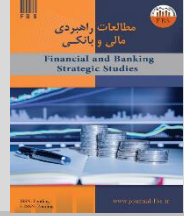
Accepted: 09/02/2024

### Abstract

In this article, Data Envelopment Analysis (DEA) models were examined to estimate the input/output levels and apply the preferences of managers or decision makers, as well as the improvement of inefficient units in the interval mode. In this article, the method proposed by Hosseinzadeh Lotfi et al. [1], which is about estimating the output levels when the input levels are increased with the assumption that the data is interval (input and output values are interval), using the model presented by Foroughi and Hadi-Vencheh [2], it was expanded to include the reduction or no change of the output levels while increasing, it was studied. Then, a model for estimating the input levels when changing (increasing, decreasing or not changing) the output levels with interval data is presented.

**Keywords:** Efficiency, Efficiency improvement, Interval data.





## نوع مقاله: پژوهشی

## بررسی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای تخمین سطوح ورودی/خروجی و بهبودبخشی کارایی سازمان‌ها

رضا توکلی مقدم

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

### چکیده

در این مقاله مدل‌های  $DEA^1$ ، برای تخمین سطوح ورودی/خروجی و اعمال ترجیحات مدیر یا تصمیم‌گیرندگان و نیز بهبودبخشی واحدهای ناکارا در حالت بازه‌ای موردبررسی قرار گرفت. در این مقاله روشی توسط حسین زاده لطفی و همکاران [1] که در مورد تخمین سطوح خروجی به هنگام افزایش سطوح ورودی با فرض بازه‌ای بودن داده‌ها (مقادیر ورودی و خروجی به صورت بازه‌ای می‌باشند) است را با استفاده از مدل ارایه شده توسط فروغی و ونجه [2] گسترش داده تا ضمن افزایش سطوح خروجی کاهش و یا عدم تغییر آن‌ها را نیز شامل شود، مورد مطالعه قرار گرفت؛ سپس مدلی برای تخمین سطوح ورودی به هنگام تغییر (افزایش، کاهش یا عدم تغییر) سطوح خروجی با داده‌های بازه‌ای ارایه شده است.

کلیدواژه‌ها: کارایی، بهبودبخشی کارایی، داده‌های بازه‌ای.

### ۱- مقدمه

اندازه‌گیری کارایی به‌خاطر اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان، همواره مورد توجه قرار داشته است. در سال ۱۹۵۷ فارل [3]، برای اولین بار مبحث تعیین کارایی را به روش غیر پارامتریک مطرح کرد. مدلی که توسط وی ارایه شد، تنها یک ورودی و یک خروجی را شامل می‌شود. چارنز و همکاران [4]، با توسعه دیدگاه فارل، مدلی تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها  $DEA$ ، که شامل چندین ورودی و خروجی است را ارایه دادند. هدف این مدل، اندازه‌گیری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای سازمانی نظیر مدارس، بیمارستان‌ها، شعب بانک‌ها، شهرداری‌ها و ... است. در مدل‌های  $DEA$  اولیه، فرض می‌شود که تمامی داده‌های ورودی و خروجی به صورت مقادیر ثابت و مثبت به صورت پیوسته در اختیار است؛ اما در عمل همیشه این امکان وجود ندارد که مقادیر داده‌ها به صورت قطعی در اختیار باشد. هم‌چنین ممکن است مقادیر بعضی داده‌ها موجود نباشد، لذا نثال و همکاران [5] پیشنهاد نمودند که واحد یا واحدهایی که داده‌های دقیق آن‌ها در اختیار نیست را، باید از مقایسه خارج کرد. البته سیما و همکاران [6] نشان دادند که این امر بر نتایج حاصل از مدل‌های  $DEA$ ، تاثیر منفی گذاشته و مقایسه‌ها را بی‌ارزش می‌کند. کوپر و همکاران [7] عنوان نمودند که به جای داده‌هایی که مقادیر دقیق آن‌ها موجود نیست از تخمین زنده‌ها (برای مثال متوسط مقدار داده‌های دیگر) در مدل‌های  $DEA$  استفاده کنند. این روش نیز چندان کارآمد نیست؛ چراکه با هر تغییر، هر چند بسیار ناچیز، ممکن است یک واحد از ناکارا به کارا و برعکس تغییر کند. کااوزمانم [8] پیشنهاد کرد که از واحدهای مصنوعی (صفر برای خروجی‌ها و عدد به اندازه کافی بزرگ برای ورودی‌ها) و نیز استفاده از محدودیت‌های وزنی خاص برای کم کردن تاثیر واحدهایی که

<sup>1</sup> Data Envelopment Analysis (DEA)

\* نویسنده مسئول



داده‌های دقیق آن‌ها در اختیار نیست، در هنگام ارزیابی کارایی واحدهای دیگر، بهره‌گیرند. با این راهکار باز هم، عدم وجود بعضی داده‌ها، در نتیجه کارایی واحدها موثر است. کاو و لیو [9] با استفاده از مفهوم تابع عضویت در مبحث فازی و به کمک داده‌های موجود، بازه‌های کراننداری را برای داده‌هایی که مقادیر آن‌ها در اختیار نبود، ارائه کردند.

اسمیرلیس و همکاران [10] نیز بازه‌های کراننداری را برای داده‌های غیردقیق ارائه دادند. تفاوت این روش با روش کاو و لیو این بود که آن‌ها از تئوری فازی برای تخمین استفاده کردند، اما در آن مقاله از تکنیک‌های دقیق برای تخمین بهره‌بردار به این صورت که از مساله‌ی هم‌بستگی ممکن بین شاخصی که بعضی یا همه‌ی داده‌های موجود نیست با شاخصی در واحد تصمیم‌گیرنده که تمامی داده‌هایش در اختیار است، استفاده نمودند. سپس به کمک رگرسیون خطی، بازه‌ای کراندار برای داده‌هایی که موجود نیستند، تخمین زدند. لذا مبحث *DEA* با داده‌های غیرقطعی به صورت گسترده‌ای مطرح شد و بیش‌تر شامل موقعیت‌هایی که مقادیر داده‌ها به صورت بازه‌ای و یا ترتیبی بودند می‌شد، که با عنوان *IDEA*<sup>۱</sup> شناخته می‌شوند. کوک و همکاران [11]، روشی برای تعیین کارایی توسط مدل‌های *DEA* در حالتی که تنها یکی از ورودی‌ها به صورت ترتیبی بود، ارائه نمودند. سپس آن‌ها بحث خود را گسترش داده و چندین ورودی را در مدل خود به صورت ترتیبی در نظر گرفتند [12]. شاید بتوان گفت بحث عمده و اساسی در *IDEA* توسط کوپر و همکاران [13] انجام گرفت، بحث عمده و اساسی در مورد *DEA* با داده‌های غیرقطعی توسط کوپر و همکاران انجام گرفت، آن‌ها با استفاده از مفهوم ناحیه اطمینان در مدل‌های *DEA*، روشی را برای پرداختن به موقعیت‌هایی که در آن‌ها داده‌ها به صورت بازه‌ای می‌باشند، ارائه دادند. مدل *DEA* که آن‌ها تحت عنوان *IDEA* ارائه دادند یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی بود که آن را از طریق مجموعه‌ای از تبدیل معیارها و تغییر متغیرها به یک مدل برنامه‌ریزی خطی معادل، تبدیل می‌کرد. امتیاز کارایی که با حل این مدل برای هر واحد حاصل می‌شد یک مقدار عددی قطعی کم‌تر یا مساوی یک بود. کیم و همکاران [14] یک مدل غیرخطی را برای مباحث *DEA* با داده‌های غیرقطعی که فقط شامل داده‌های ترتیبی بود و بازه‌ای را شامل نمی‌شد، ارائه دادند. لی و همکاران [15] بحث *IDEA* را به مدل جمعی *DEA* توسعه و تعمیم دادند. مدلی که توسط کوپر و همکاران برای مبحث *DEA* با داده‌های بازه‌ای ارائه شد، به دلیل وجود تعداد زیاد تبدیل‌ها و تغییر متغیرها، پیچیده بود. دسپوتیس و همکاران [16] نیز بحث *DEA* با داده‌های بازه‌ای را مورد بررسی قرار دادند ولی آن‌ها برای خطی کردن مدل خود فقط از تبدیل متغیر استفاده کردند؛ لذا مدل آن‌ها نسبت به مدل کوپر ساده‌تر گردید. آن‌ها جفت مدل‌هایی را برای تعیین کارایی هر *DMU* ارائه نمودند. امتیازات کارایی که برای هر واحد به دست می‌آید به صورت بازه‌ای است. در مدل‌های ارائه‌شده برای تعیین کارایی هر *DMU* از مرزهای کارایی متفاوتی استفاده می‌شود.

انتانی و همکاران [17] مدل *DEA* ارائه نمودند که به کمک آن، کارایی‌های بازه‌ای برای هر *DMU* از دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه مورد محاسبه قرار می‌گرفت. مدل آن‌ها ابتدا برای داده‌های قطعی قابل اجرا بود ولی سپس آن‌ها مدل خود را توسعه دادند که شامل داده‌های بازه‌ای و فازی نیز شد. ایراد مدل آن‌ها این بود که فقط یک ورودی و یک خروجی را در نظر می‌گرفت و علاوه بر آن مدل آن‌ها مرزهای کارایی متفاوتی (مجموعه محدودیت‌های مختلفی) را برای اندازه‌گیری بازه‌های کارایی *DMUs* مختلف به کار می‌برد. یک تفاوت مهم و تعیین‌کننده‌ای که بین مدل آن‌ها و سایر مدل‌های *DEA* بازه‌ای وجود دارد این است که آن‌ها در مدل خود، بدترین کارایی نسبی ممکن برای هر *DMU* را در بدترین شرایط ممکن برای آن *DMU* محاسبه کرده و به عنوان کران پایین کارایی *DMU* را در نظر می‌گرفتند. حال آن‌ها که مدل‌های دیگر بهترین (ماکزیمم) کارایی نسبی ممکن برای هر *DMU* را در بدترین شرایط ممکن برای آن *DMU*، محاسبه نموده و به عنوان کران پایین بازه‌ی کارایی آن *DMU* در نظر می‌گرفتند. جهان‌شاهلو و همکاران [20-18] بر روی مباحث برگشت به معیار، تجزیه و تحلیل حساسیت، پایداری و کارایی *FDH* در *DEA* بازه‌ای بحث کردند. وانگ و همکاران [21] جفت مدل‌های *DEA* بازه‌ای را ارائه دادند که کمبودها و نارسایی‌هایی که مدل‌های قبل داشتند را تا حدودی جبران می‌کرد. همان‌طور که بیان شد مدل انتانی و همکاران، قادر بود ترکیبی از داده‌های بازه‌ای، قطعی یا فازی را شامل شود ولی تنها یک ورودی و یک خروجی داشت. مدل‌های دیگر در این زمینه فقط داده‌های بازه‌ای را شامل می‌شدند. هم‌چنین مدل‌هایی که بیان می‌شد، برای تعیین بازه‌ی کارایی هر *DMU*، از مجموعه محدودیت‌های مختلف و مرزهای کارایی متفاوت استفاده می‌کرد که در مدل وانگ این گونه نبود. در واقع مدلی که توسط وانگ و همکاران ارائه شد، قادر بود هم‌زمان ترکیبی از داده‌های قطعی، بازه‌ای و فازی را بدون محدودیت در تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های به کار ببرد و هم‌چنین از یک مجموعه محدودیت یکسان برای تعیین بازه کارایی *DMUs* مختلف استفاده کند. یکی از مساله‌هایی که در سال‌های اخیر در *DEA* مطرح می‌شود مساله تخمین خروجی هاست که اولین بار توسط وی و همکاران [22] مطرح شد. به این صورت که اگر در یک *DMU* ورودی‌ها

<sup>1</sup> Imprecise DEA

را به میزان معینی افزایش دهیم و بخواهیم کارایی ثابت بماند چه مقدار خروجی باید تولید کنیم که مدل ارایه شده برای پاسخ به این سوال، مدل  $DEA$  معکوس<sup>۱</sup> بوده است. آن‌ها در مدل خود فرض نمودند که با افزایش سطوح ورودی، میزان کارایی  $DMU$  ثابت می ماند و سپس به تخمین خروجی‌ها پرداختند. آن‌ها مساله  $DEA$  معکوس را به یک مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه تبدیل نموده و نشان دادند که در بعضی موارد خاص، مساله  $DEA$  معکوس می تواند ساده شود و تبدیل به یک برنامه ریزی خطی تک هدفه شود. یان و همکاران [23] نتایج به دست آمده از مقاله وی و همکاران را با استفاده از نسبت  $DEA$  مخروطی توسعه و گسترش دادند. به عبارت دیگر آن‌ها مساله  $DEA$  معکوس با ساختار نسبت مخروطی را مورد بررسی قرار دادند. مفاهیم مخروط نسبت، ترجیحات تصمیم گیرندگان یا سیاست‌های از پیش تعیین شده در مورد اهمیت نسبی واحدهای ورودی و خروجی مختلف را ارایه می کرد. عیبی که مدل ترکیبی حاصل از مخروط ترجیحات و  $DEA$  معکوس دارد پیچیدگی‌های زیاد مدل از جنبه ریاضی مدل بود. هم چنین آن‌ها سطح کارایی  $DMU$  را ثابت فرض کرده و بهبود آن را در نظر نگرفتند. همان طور که بیان شد، مدل‌های  $DEA$  معکوس که توسط وی و همکاران [22] مطرح شد، با فرض ثابت ماندن کارایی به تخمین سطوح خروجی به هنگام افزایش سطوح ورودی می پرداخت. جهانشاهلو و همکاران [18] مدل ارایه شده توسط یان را گسترش داده و مساله تخمین خروجی‌ها به هنگام افزایش سطوح ورودی را با فرض بهبود سطح کارایی  $DMU$  مورد نظر، مورد بحث قرار دادند. فروغی و هادی ونچه [2] طی مقاله‌ای یک مدل کلی برای مساله‌های تخمین ورودی/خروجی‌ها ارایه دادند. در حقیقت آنچه تاکنون به آن پرداخته شده بود، فقط افزایش در سطوح ورودی و خروجی بود، در حالی که بعضی واحدها ممکن است در نظر داشته باشند که علاوه بر افزایش سطوح ورودی/خروجی، بعضی سطوح ورودی/خروجی خود را کاهش دهند. این مبحث نسبت به مباحث قبلی کلی تر می باشد.

فروغی و ونچه در مقاله خود تغییرات دلخواه (افزایش یا کاهش) در سطوح ورودی (خروجی) را در نظر گرفته و یک مدل برنامه ریزی خطی چندهدفه  $MOLP$  را برای تخمین سطوح خروجی (ورودی) پیشنهاد دادند. وی و همکاران به منظور تخمین سطوح خروجی (ورودی) یک مدل  $MOLP$  را برای هنگامی که  $DMU$  تحت ارزیابی ناکاراست و نیز یک مدل برنامه ریزی خطی  $LP$  را برای  $DMU$  با کارایی ضعیف ارایه دادند؛ ولی مدلی که فروغی و ونچه ارایه دادند، نیاز به این طبقه بندی ندارد و قادر است سطوح ورودی و خروجی را بدون در نظر گرفتن نوع کارایی  $DMU$  (کارای قوی، کارای ضعیف و ناکارا) تخمین بزند. هم چنین آن‌ها در مقاله خود نشان دادند که مدل تخمین ورودی/خروجی که وی و همکاران ارایه دادند همیشه پاسخ صحیح را نمی دهد و اثبات نمودند که در مدل تخمین ورودی‌ها یعنی محدودیت  $\alpha_0 \geq x_0$  که در آن بردار ورودی‌های جدید و  $\alpha_0$  بردار ورودی‌های قبلی است و محدودیت  $\beta_0 \geq y_0$  که در آن بردار خروجی‌های جدید و بردار خروجی‌های قبلی است، باید حذف شود. در واقع آن‌ها یک مدل کلی برای تخمین سطوح ورودی/خروجی ارایه دادند. همان طور که می دانیم، از مدل‌های  $DEA$  می توان برای تخمین سطوح خروجی (ورودی) یک واحد تصمیم گیرنده، هنگامی که همه یا بعضی از سطوح ورودی (خروجی) اش افزایش می یابد با فرض ثابت ماندن کارایی و یا بهبود کارایی بهره برد. حسین زاده لطفی و همکاران [1] این ایده را برای داده‌های بازه‌ای گسترش و تعمیم دادند. آن‌ها تحلیل پوششی داده‌ها،  $DEA$  را با داده‌های بازه‌ای به کار بردند، تا تعیین کنند که هنگام افزایش سطوح ورودی چه مقدار خروجی باید تولید کنند تا سطوح کارایی  $DMU$  مورد نظر ثابت بماند و یا بهبود مورد نظر تصمیم گیرنده حاصل شود. برای تخمین سطوح خروجی دو مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه ارایه دادند که با حل آن سطوح خروجی یا به عبارتی کران‌های بالا و پایین بازه‌های جدید سطوح خروجی را تخمین زدند. در واقع آن‌ها مدل ارایه شده توسط دسپوتیس و اسمیرلیس [16] در زمینه تعیین کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با داده‌های بازه‌ای را با مدل  $DEA$  معکوسی که توسط وی و همکاران [22] ارایه شده بود را ترکیب کرده و مدل جدیدی را برای تخمین سطوح خروجی واحدهای تصمیم گیرنده با داده‌های بازه‌ای، به هنگام افزایش سطوح ورودی با فرض ثابت ماندن یا بهبود کارایی ارایه دادند.

## ۲- مدل کلی برای تخمین سطوح خروجی در $DEA$ با داده‌های بازه‌ای

فرض کنید  $n$  واحد تصمیم گیرنده به صورت  $\{DMU_j; j = 1, \dots, n\}$  موجود است، که هر کدام از  $m$  ورودی جهت تولید  $s$  خروجی استفاده می کنند. مقادیر داده‌های ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیرنده به صورت بازه‌های کراندار می باشد یعنی مقدار دقیق داده‌ها در اختیار نیست و به جای آن کران بالا و پایین هر داده تعیین شده است؛ به طوری که برای  $DMU_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) داریم  $x_{ij}^l \leq x_{ij} \leq x_{ij}^u$  ( $i = 1, \dots, m$ ) یا به عبارت دیگر  $x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^u]$ ;  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$  و نیز  $y_{rj}^l \leq y_{rj} \leq y_{rj}^u$  یا به عبارت دیگر  $y_{rj} \in [y_{rj}^l, y_{rj}^u]$ ;  $r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n$  که در آن  $x_{ij}^l, x_{ij}^u$  کران‌های پایین بازه‌ها و  $y_{rj}^l, y_{rj}^u$  کران‌های بالای بازه‌ها می باشند نیز، مقادیر آن‌ها ثابت و اکیدا مثبت فرض می شود  $1, \dots, n$ .

<sup>1</sup> Inverse DEA

و همیشه  $x_{ij}^l \leq x_{ij}^u$ ،  $y_{rj}^l \leq y_{rj}^u$  و اگر داشته باشیم  $x_{ij}^l = x_{ij}^u$ ، آن‌گاه  $i$ th ورودی  $j$ th واحد تصمیم‌گیرنده دارای مقدار دقیق و معینی است. واحد تحت ارزیابی  $p$ th یعنی  $DMU_p$  را در نظر بگیریم. فرض می‌شود که ورودی‌های این واحد یا به عبارت دیگر کران‌های پایین و بالای ورودی‌های  $DMU_p$  یعنی  $x_{ip}^l$  و  $x_{ip}^u$  ( $i=1, \dots, m$ ) به ترتیب به میزان  $\Delta x_{ip}^l$  و  $\Delta x_{ip}^u$  ( $i=1, \dots, m$ ) تغییر (افزایش یا کاهش) یافته‌اند. لذا مقادیر جدید ورودی  $DMU_p$  به صورت  $\alpha_{ip}^l = x_{ip}^l + \Delta x_{ip}^l$ ;  $i=1, \dots, m$  و  $\alpha_{ip}^u = x_{ip}^u + \Delta x_{ip}^u$ ;  $i=1, \dots, m$  خواهد بود یا به عبارت دیگر مقادیر ورودی جدید به صورت بازه‌ی کراندار  $[\alpha_{ip}^l, \alpha_{ip}^u]$ ،  $i=1, \dots, m$ ، می‌باشد. در این صورت در نظر داریم مقادیر جدید خروجی  $DMU_p$  را با فرض ثابت ماندن کارایی و نیز بهبود سطح کارایی  $DMU_p$  تخمین بزنیم. چون داده‌ها بازه‌ای می‌باشند مقادیر جدید خروجی را به صورت بازه‌های کراندار  $[\beta_{rp}^l, \beta_{rp}^u]$ ،  $r=1, \dots, s$ ؛ که توسط جفت مدل‌های زیر که با استفاده از مدل‌های  $DEA$  بازه‌ای ارایه شده توسط اسمیرلیس و دسپوتیس [16] و مدل کلی تخمین خروجی‌ها توسط فروغی و ونجه [2] تخمین می‌زنیم.

$$\begin{aligned} \text{Max } \beta_p^l &= (\beta_{1p}^l, \beta_{2p}^l, \dots, \beta_{sp}^l), \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^l + \lambda_p x_{ip}^u &\leq \alpha_{ip}^u, \quad i=1, \dots, m, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^u + \lambda_p y_{rp}^l &\leq (1 - \frac{\eta}{100}) \beta_{rp}^l, \quad r=1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

و

$$\begin{aligned} \text{Max } \beta_p^u &= (\beta_{1p}^u, \beta_{2p}^u, \dots, \beta_{sp}^u), \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^u + \lambda_p x_{ip}^l &\leq \alpha_{ip}^l, \quad i=1, \dots, m, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^l + \lambda_p y_{rp}^u &\leq (1 - \frac{\eta}{100}) \beta_{rp}^u, \quad r=1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

مقادیر  $\beta_p^l$  و  $\beta_p^u$  مقادیر کارایی هستند که با حل جفت مدل‌های ارایه شده توسط دسپوتیس و اسمیرلیس [16] به دست می‌آید. مدل (۱) و مدل (۲) مدل‌های خطی چندهدفه می‌باشند که برای حل آن‌ها می‌توان به کمک روش‌های تصمیم‌گیری و استفاده از نظرات افراد تصمیم‌گیرنده به هر شاخص خروجی وزنی را که نشان‌دهنده ارزش و اهمیت آن شاخص می‌باشد ارایه داد [24]، [25] و سپس با استفاده از مجموع موزون تابع هدف را به صورت خطی نوشت. فرض کنید که  $w_r$ ؛  $r=1, \dots, s$  وزن‌های اختصاص داده شده به هر شاخص خروجی باشند. در این صورت توابع هدف مدل (۱) و مدل (۲) را به ترتیب می‌توان به صورت  $\sum_{r=1}^s w_r \beta_{rp}^u$  و  $\sum_{r=1}^s w_r \beta_{rp}^l$  نوشت.

### ۳- مدل کلی برای تخمین سطوح ورودی در $DEA$ با داده‌های بازه‌ای

مدل مضربی  $CCR$  خروجی محور با داده‌های بازه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max } \sum_{r=1}^s u_r [y_{rp}^l, y_{rp}^u], \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{i=1}^m v_i [x_{ip}^l, x_{ip}^u] &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r [y_{rp}^l, y_{rp}^u] - \sum_{i=1}^m v_i [x_{ip}^l, x_{ip}^u] &\leq 0, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r=1, \dots, s, \quad i=1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

با اعمال تغییر متغیرهایی مشابه با تغییر متغیرهایی که دسپوتیس و اسمیرلیس [16] به کار بردند، مدل غیر خطی (۳) را می‌توان به صورت مدل خطی (۴) نوشت.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{r=1}^s \left[ u_r y_{rp}^l + P_{rp} (y_{rp}^u - y_{rp}^l) \right], \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m \left[ v_i x_{ip}^l + q_{rp} (x_{ip}^u - x_{ip}^l) \right] = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s \left[ u_r y_{rp}^l + P_{rp} (y_{rp}^u - y_{rp}^l) \right] - \sum_{i=1}^m \left[ v_i x_{ip}^l + q_{ij} (x_{ip}^u - x_{ip}^l) \right] \leq 0, \\
 & q_{ij} \leq v_i; i=1, \dots, m; j=1, \dots, n, \\
 & P_{rp} \leq u_r; r=1, \dots, s; j=1, \dots, n, \\
 & P_{rp}, q_{ij}, u_r, v_i \geq 0; r=1, \dots, s; i=1, \dots, m; j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

حل این مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تا حدودی دشوار است؛ چراکه مدل (۵) و مدل (۶) را برای تعیین کران‌های پایین و بالای کارایی به ترتیب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^L, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^U = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq 0, \quad j=1, \dots, n; j \neq p, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^U \leq 0, \\
 & u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s, \\
 & v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۵}$$

و

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^U, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^L = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad j \neq p, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^L \leq 0, \\
 & v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \\
 & u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۶}$$

دوگان مدل (۵) و مدل (۶)، مدل (۷) و مدل (۸) می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta^L = \theta, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_p x_{ip}^L \leq \theta x_{ip}^U, \quad i=1, \dots, m, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_p y_{rp}^L \geq y_{rp}^L, \quad r=1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۷}$$

و

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta^U = \theta, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_p x_{ip}^L \leq \theta x_{ip}^L; i=1, \dots, m, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_p y_{rp}^U \geq y_{rp}^U; r=1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0; j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

واحد تحت ارزیابی  $p$ th یعنی  $DMU_p$  را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که خروجی‌های این واحد یا به عبارت دیگر کران‌های پایین و بالای خروجی‌های  $DMU_p$  یعنی  $y_{rp}^L$  و  $y_{rp}^U$  ( $r=1, \dots, s$ ) به ترتیب به میزان  $\Delta y_{rp}^L$  و  $\Delta y_{rp}^U$  ( $r=1, \dots, s$ ) تغییر یافته‌اند، لذا مقادیر جدید خروجی  $DMU_p$  به صورت  $\beta_{rp}^L = y_{rp}^L + \Delta y_{rp}^L$ ;  $r=1, \dots, s$  و  $\beta_{rp}^U = y_{rp}^U + \Delta y_{rp}^U$ ;  $r=1, \dots, s$  خواهد بود یا به عبارت دیگر مقادیر خروجی جدید به صورت بازه‌ی کراندار  $[\beta_{rp}^L, \beta_{rp}^U]$ ;  $r=1, \dots, s$  است. در این صورت در نظر داریم مقادیر جدید ورودی  $DMU_p$  را با فرض ثابت ماندن کارایی و نیز بهبود سطح کارایی  $DMU_p$  تخمین بزنیم [26]. چون داده‌ها بازه‌ای می‌باشند مقادیر جدید ورودی را به صورت بازه‌های کراندار  $[\alpha_{ip}^L, \alpha_{ip}^U]$ ;  $i=1, \dots, m$ ، توسط جفت مدل (۹) و مدل (۱۰) که با استفاده از مدل (۷) و مدل (۸) و مدل کلی تخمین خروجی‌ها توسط فروغی و ونجه [2] تخمین می‌زنیم.

$$\text{Min } \alpha_p^L = (\alpha_{1p}^L, \alpha_{2p}^L, \dots, \alpha_{mp}^L),$$

s.t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_p x_{ip}^U \leq (1 + \frac{\delta}{100}) \theta^L \alpha_{ip}^U, \quad i=1, \dots, m, \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_p y_{rp}^L \leq \beta_{rp}^L, \quad r=1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

و

$$\text{Min } \alpha_p^U = (\alpha_{1p}^U, \alpha_{2p}^U, \dots, \alpha_{mp}^U),$$

s.t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_p x_{ip}^L \leq (1 + \frac{\delta}{100}) \theta^U \alpha_{ip}^L, \quad i=1, \dots, m, \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_p y_{rp}^U \leq \beta_{rp}^U, \quad r=1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

مدل (۹) و مدل (۱۰) مدل‌های خطی چندهدفه می‌باشند که برای حل آن‌ها می‌توان به کمک روش‌های تصمیم‌گیری و استفاده از نظرات افراد تصمیم‌گیرنده به هر شاخص خروجی وزنی را که نشان دهنده ارزش و اهمیت آن شاخص می‌باشد، ارایه داد و سپس با استفاده از مجموع موزون تابع هدف را به صورت خطی نوشت. فرض کنید که  $w_i$ ;  $i=1, \dots, m$  وزن‌های اختصاص داده شده به هر شاخص خروجی باشند. در این صورت توابع هدف را به ترتیب می‌توان به صورت  $\sum_{i=1}^m w_i \alpha_{ip}^U$  و  $\sum_{i=1}^m w_i \alpha_{ip}^L$  نوشت. مقادیر  $\theta^L$  و  $\theta^U$  به ترتیب کران‌های پایین و بالای کارایی  $DMU_p$  است که به ترتیب توسط مدل‌های فوق به دست می‌آید.

#### ۴- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی ۲۴ شعبه از شعب بانک سامان در سطح تهران در نظر گرفته شده است. چهار شاخص هزینه‌ها، مطالبات معوق، پرداخت‌های انگیزشی و خدمات الکترونیکی به‌عنوان شاخص‌های ورودی و چهار شاخص میزان جذب مشتری جدید، درآمدها، سپرده‌ها، و بهره‌وری  $ATMs$  به‌عنوان شاخص‌های خروجی، برای هر یک از شعب تحت بررسی در نظر گرفته شد. داده‌های هر یک از این شاخص‌ها به صورت بازه‌ای فرض می‌شود. با حل مدل‌های فوق و میزان کران‌های بالا و پایین کارایی ورودی محور هر یک از این شعب در مقایسه با یکدیگر تعیین شد که در جدول ۱ نشان داده شده است. با توجه به روش‌های مطرح شده می‌توان گفت که واحدهای ۱، ۳، ۸، ۷، ۹، ۱۳، ۱۶، ۱۸، ۲۱، ۲۳ و ۲۴ کارا می‌باشند. واحدهای ۲، ۵، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۷، ۱۹ و ۲۰ ناکارا می‌باشند و در کارا یا ناکارا بودن بقیه‌ی واحدها نمی‌توان به طور دقیق اظهار نظر نمود.

مدل (۹) را برای واحد تحت ارزیابی دوم که یک واحد ناکارا است، می‌توان به صورت مدل (۱۱) نوشت. پارامتر  $0/52987$  میزان کران بالای کارایی، پارامترهای  $13000$ ،  $145/90$ ،  $1732$  و  $15110$  مقادیر کران‌های پایین ورودی و پارامترهای  $3300$ ،  $495130/90$ ،  $4472$  و  $153/95$  مقادیر کران‌های بالای کارایی  $DMU_2$  می‌باشند. شاخص خروجی میزان جذب مشتری جدید را در نظر گرفته و مقادیر آن (کران

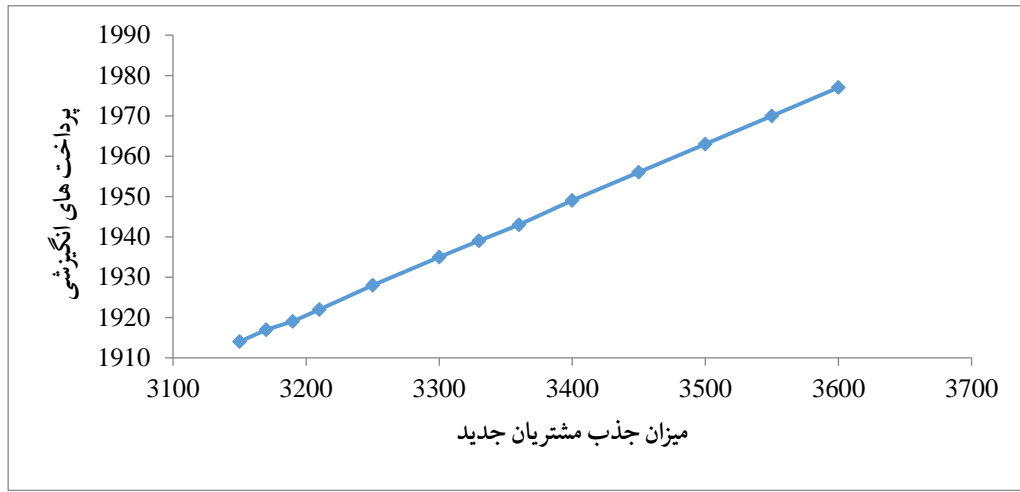
پایین و بالای بازه) را افزایش می‌دهد. شکل ۱ تا شکل ۴ روند تغییرات کران‌های پایین ورودی‌ها را به ازای تغییر در کران بالای خروجی این شاخص با ثابت ماندن میزان کران پایین کارایی نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رود چون مقدار خروجی افزایش می‌یابد و فرض بر این است که میزان کارایی ثابت بماند، لذا برآیند ورودی‌ها افزایش می‌یابد که این روند در شکل‌ها مشاهده می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w_1 \alpha_{12}^L + w_1 \alpha_{22}^L + w_1 \alpha_{32}^L + w_1 \alpha_{42}^L \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{1j}^U + 13000 \lambda_2 \leq 0.52987 \alpha_{12}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{2j}^U + 145.90 \lambda_2 \leq 0.52987 \alpha_{22}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{3j}^U + 1732 \lambda_2 \leq 0.52987 \alpha_{32}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{4j}^U + 15110 \lambda_2 \leq 0.52987 \alpha_{42}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{1j}^L + 3300 \lambda_2 \leq \beta_{12}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{2j}^L + 495130.90 \lambda_2 \leq \beta_{22}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{3j}^L + 4472 \lambda_2 \leq \beta_{32}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{4j}^L + 153.95 \lambda_2 \leq \beta_{42}^U, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 24.
 \end{aligned} \tag{11}$$

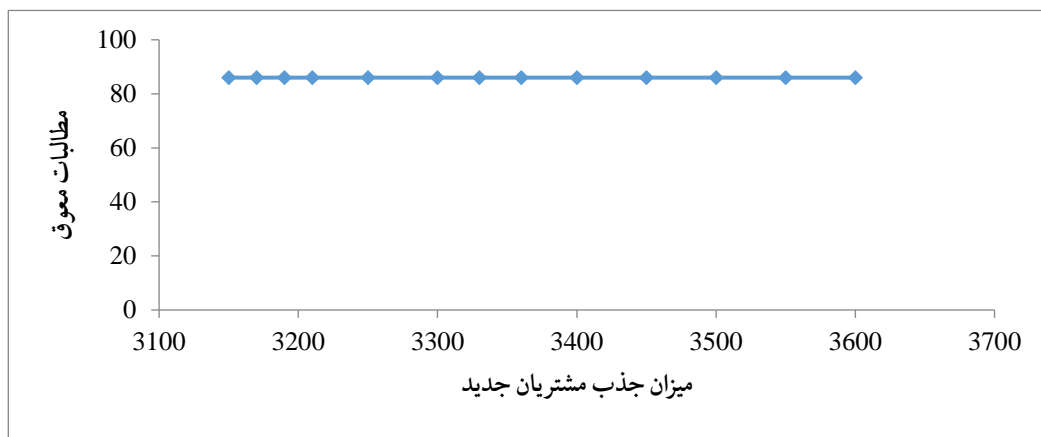
جدول ۱- میزان کارایی بالا و پایین شعب تحت ارزیابی با داده‌های بازه‌ای.

Table 1- The level of high and low efficiency of branches under evaluation with interval data.

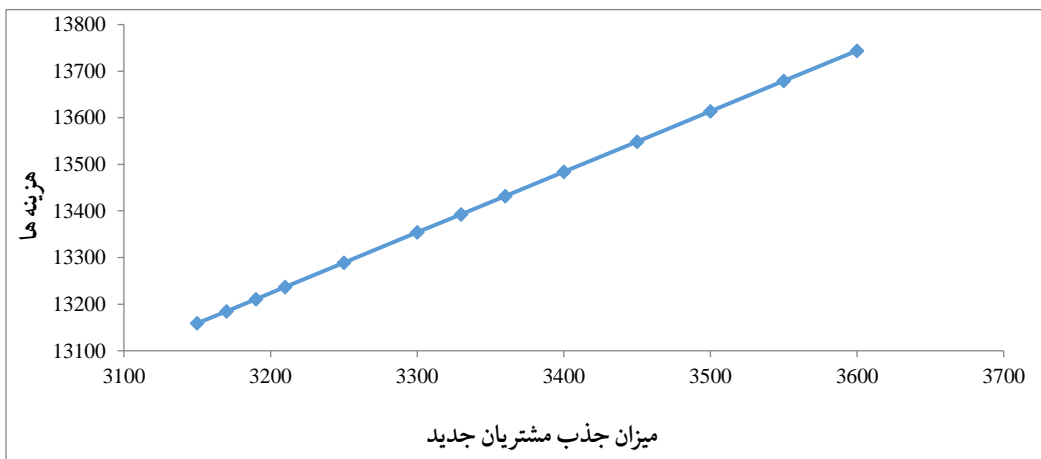
$[\theta^L, \theta^U]$	نام شعبه‌ی تحت ارزیابی	$[\theta^L, \theta^U]$	نام شعبه‌ی تحت ارزیابی
[1,1]	ایران زمین	[1,1]	آفریقا
[0.68958,0.74113]	یافت آباد	[0.47904,0.52987]	مرکزی
[0.67796,1]	پل رومی	[1,1]	باغ فردوس
[1,1]	آفریقای شمالی	[0.99629,1]	پاسداران
[0.84194,0.90133]	جام جم	[0.93980,0.96094]	بازار
[1,1]	پیروزی	[0.90702,1]	صادقیه
[0.88034,0.89934]	ولنجک	[1,1]	اقدسیه
[0.81120,0.82897]	آذربایجان	[1,1]	میرداماد
[1,1]	شهرک اکباتان	[1,1]	فاطمی
[0.93997,1]	آرژانتین	[0.79352,0.90709]	سعادت آباد
[1,1]	قیطریه	[0.83455,1]	جنت آباد
[1,1]	سی تیر	[0.73008,0.76456]	دولت



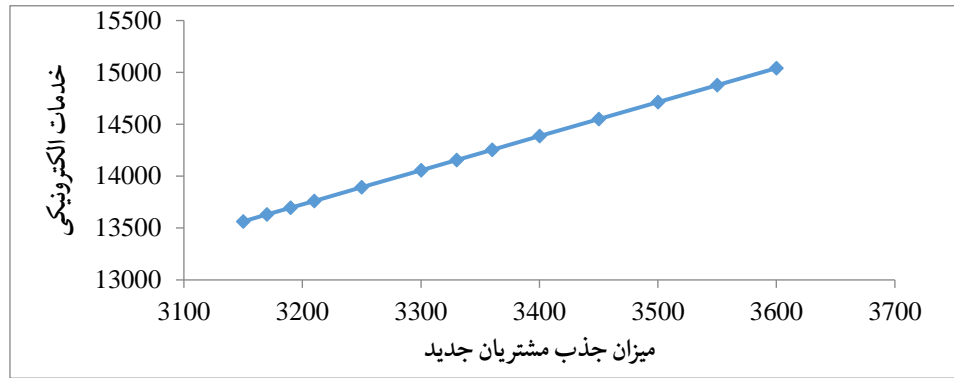
شکل ۱- روند تغییرات کران پایین شاخص هزینه‌ها در ازای افزایش کران بالای شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
**Figure 1- The trend of changes in the lower limit of the cost index in exchange for the increase in the upper limit of the output index of the rate of attracting new customers.**



شکل ۲- روند تغییرات کران پایین شاخص مطالبات معوق در ازای افزایش کران بالای شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
**Figure 2- The trend of changes in the lower limit of the outstanding claims index in exchange for the increase of the upper limit of the output index of the rate of attracting new customers.**



شکل ۳- روند تغییرات کران پایین شاخص پرداخت‌های انگیزشی در ازای افزایش کران بالای شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
**Figure 3- The trend of changes in the lower limit of the incentive payments index in exchange for increasing the upper limit of the output index of attracting new customers.**



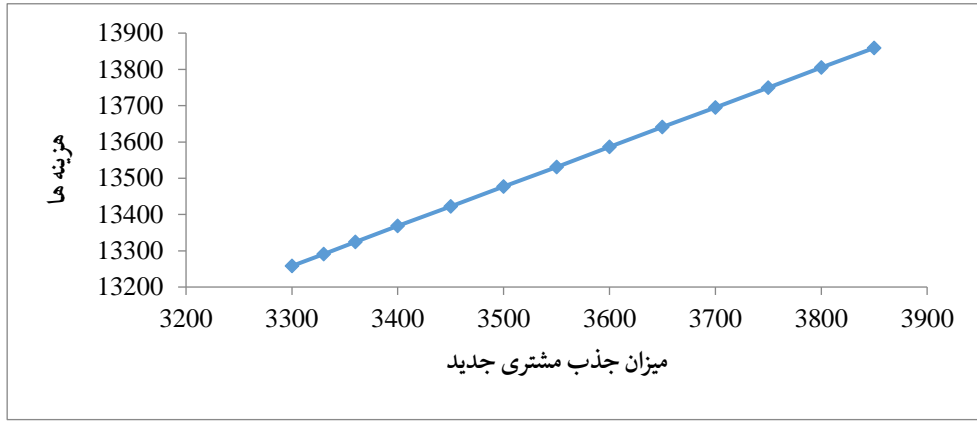
شکل ۴- روند تغییرات کران پایین شاخص خدمات الکترونیکی در ازای افزایش کران بالای شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.

Figure 4- The trend of changes in the lower limit of the electronic service index in exchange for the increase in the upper limit of the output index of the rate of attracting new customers.

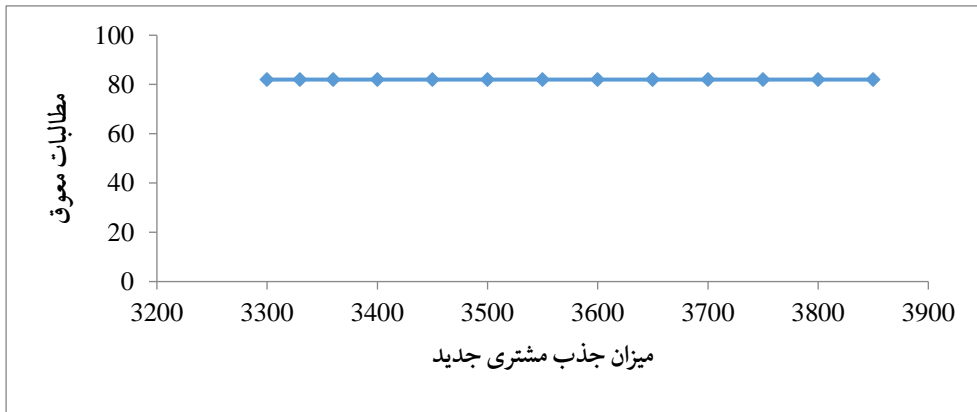
$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w_1 \alpha_{12}^U + w_1 \alpha_{22}^U + w_1 \alpha_{32}^U + w_1 \alpha_{42}^U \\
 & \text{S.t.} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{1j}^L + 14000 \lambda_2 \leq 0.47904 \alpha_{12}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{2j}^U + 149 \lambda_2 \leq 0.47904 \alpha_{22}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{3j}^U + 1734.40 \lambda_2 \leq 0.47904 \alpha_{32}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j x_{4j}^U + 15170 \lambda_2 \leq 0.47904 \alpha_{42}^U, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{1j}^L + 3150 \lambda_2 \leq \beta_{12}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{2j}^L + 495110.80 \lambda_2 \leq \beta_{22}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{3j}^L + 4459 \lambda_2 \leq \beta_{32}^L, \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{24} \lambda_j y_{4j}^L + 1151.70 \lambda_2 \leq \beta_{42}^L, \\
 & \lambda_j \geq 0; j = 1, \dots, 24.
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

مدل (۱۰) را برای واحد تحت ارزیابی دوم که یک واحد ناکارا است، می توان به صورت مدل (۱۲) نوشت.

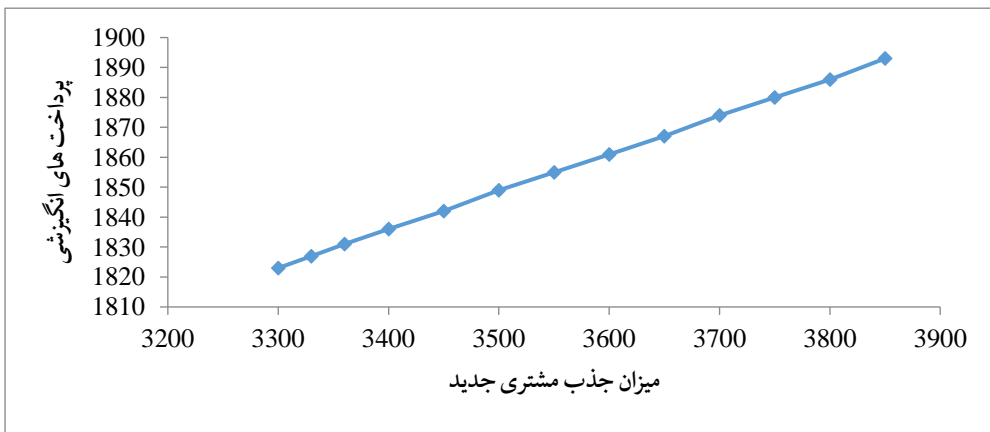
مدل (۱۰) را برای واحد تحت ارزیابی دوم که یک واحد ناکارا است  $\beta_{42}^L$  و  $\beta_{32}^L$ ،  $\beta_{22}^L$ ،  $\beta_{12}^L$  مقادیر جدید خروجی می باشند که توسط فرد تصمیم گیر تعیین می شود لذا در اختیار می باشد و  $\alpha_{12}^U$ ،  $\alpha_{22}^U$ ،  $\alpha_{32}^U$  و  $\alpha_{42}^U$  بیشترین مقدار ورودی های ممکن می باشند که واحد تحت ارزیابی می تواند برای تولید خروجی های مورد نظر تصمیم گیر مصرف کند، که توسط مدل تخمین زده می شوند. پارامتر  $0.47904$  میزان کران پایین کارایی، پارامترهای  $14000$ ،  $149$ ،  $1734.40$ ،  $15170$  و  $3150$  مقادیر کران های بالای ورودی و پارامترهای  $3150$ ،  $495110.80$ ،  $4459$  و  $1151.70$  کران های پایین خروجی برای  $DMU_2$  می باشد. شکل ۵ تا شکل ۸ روند تغییرات کران های بالای ورودی ها را به ازای تغییر در کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتری جدید با فرض ثابت ماندن میزان کران پایین کارایی نشان می دهند. همانطور که انتظار می رود چون مقدار خروجی افزایش می یابد و فرض بر این است که میزان کارایی ثابت بماند لذا برآیند ورودی ها افزایش می یابد که این روند در شکل ۵ تا شکل ۸ مشاهده می شود.



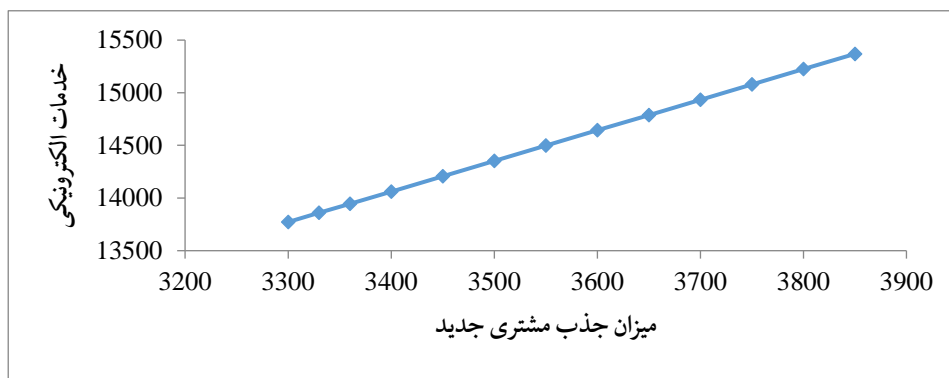
شکل ۵- روند تغییرات کران بالای شاخص هزینه‌ها در ازای افزایش کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
 Figure 5- The trend of changes in the upper limit of the cost index in exchange for the increase of the lower limit of the output index of the rate of attracting new customers.



شکل ۶- روند تغییرات کران بالای شاخص مطالبات معوق در ازای افزایش کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
 Figure 6- The trend of changes in the upper limit of the deferred claims index in exchange for the increase of the lower limit of the output index of the rate of attracting new customers.



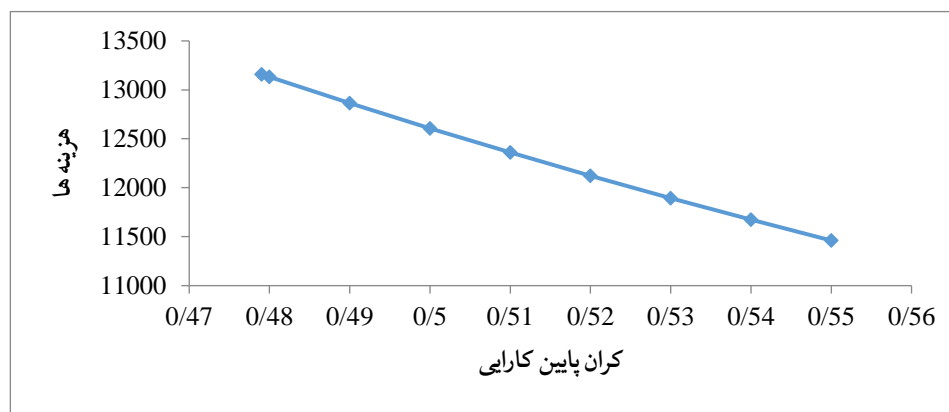
شکل ۷- روند تغییرات کران بالای شاخص پرداخت‌های انگیزشی در ازای افزایش کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.  
 Figure 7- The trend of changes in the upper limit of the incentive payments index in exchange for increasing the lower limit of the output index of attracting new customers.



شکل ۸- روند تغییرات کران بالای شاخص خدمات الکترونیکی در ازای افزایش کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.

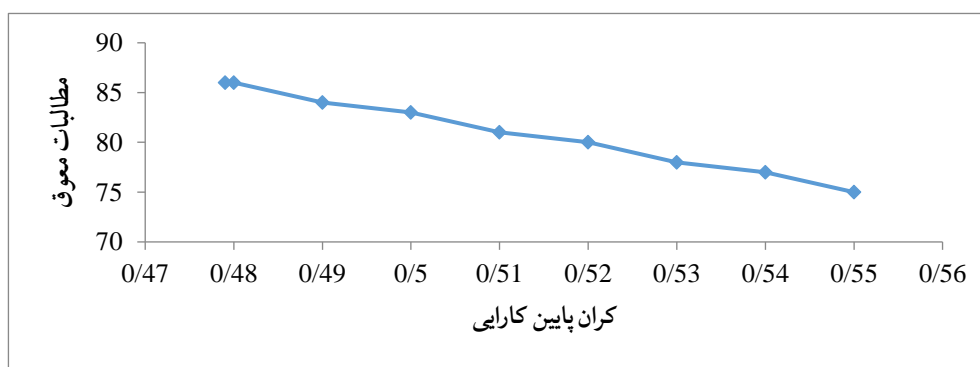
Figure 8- The trend of changes in the upper limit of the electronic services index in exchange for the increase in the lower limit of the output index of the rate of attracting new customers.

حال اگر در نظر بگیریم با ثابت ماندن سطوح خروجی واحد تحت ارزیابی دوم کران‌های پایین و بالای کارایی را افزایش دهیم روند تغییرات سطوح ورودی همانطور که انتظار می‌رود به صورت نزولی است و در شکل ۹ تا شکل ۱۶ قابل مشاهده است.



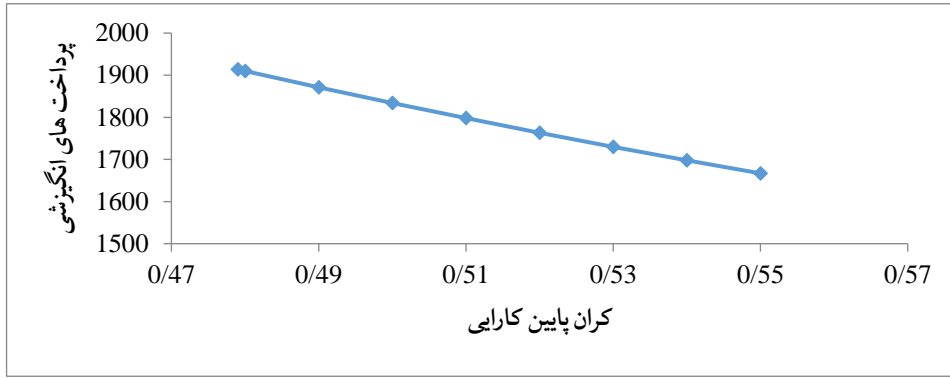
شکل ۹- روند تغییرات شاخص ورودی هزینه‌ها در ازای افزایش کران پایین کارایی.

Figure 9- The trend of changes in the cost input index in exchange for increasing the lower limit of efficiency.



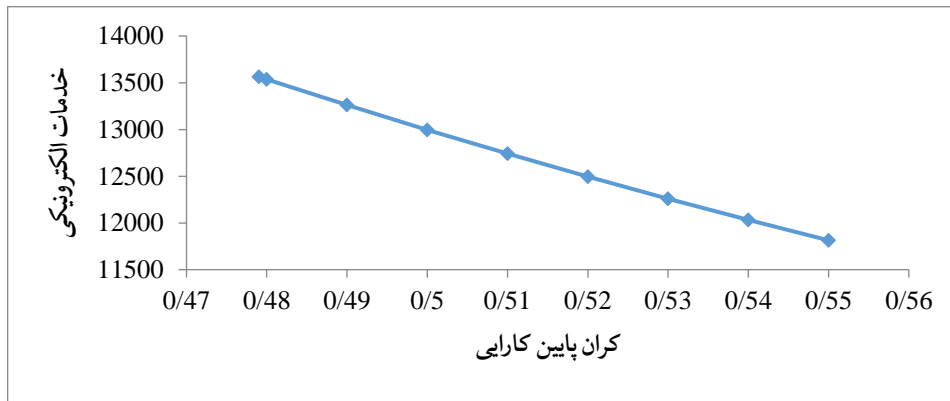
شکل ۱۰- روند تغییرات شاخص ورودی مطالبات معوق در ازای افزایش کران پایین کارایی.

Figure 10- The trend of changes in the input index of deferred claims in exchange for increasing the lower limit of efficiency.



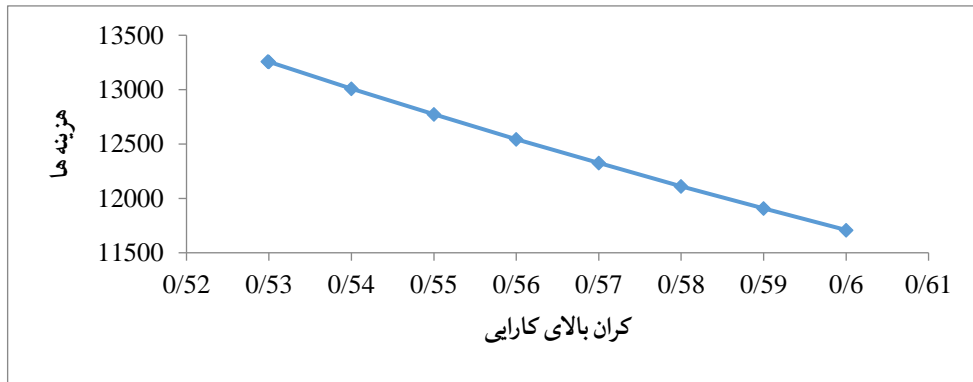
شکل ۱۱- روند تغییرات شاخص ورودی پرداخت‌های انگیزشی در ازای افزایش کران پایین کارایی.

Figure 11- The trend of changes in the input index of incentive payments in exchange for increasing the lower limit of efficiency.



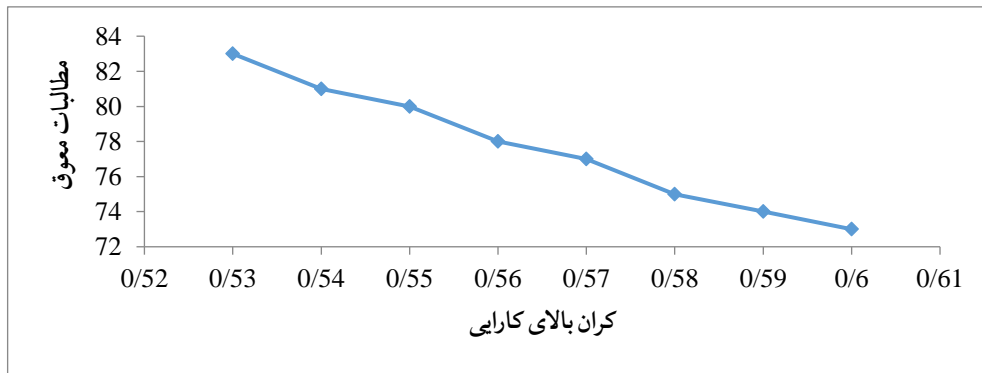
شکل ۱۲- روند تغییرات شاخص ورودی خدمات الکترونیکی در ازای افزایش کران پایین کارایی.

Figure 12- The trend of changes in the input index of electronic services in exchange for increasing the lower limit of efficiency.



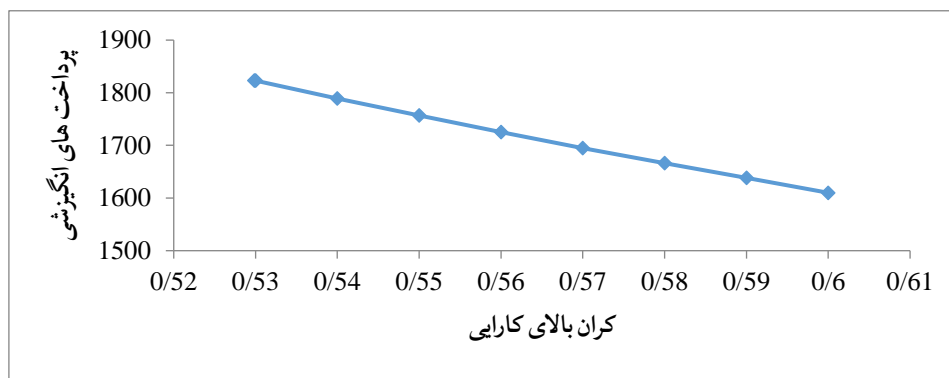
شکل ۱۳- روند تغییرات شاخص ورودی هزینه‌ها در ازای افزایش کران بالای کارایی.

Figure 13- Changes in the cost input index in exchange for increasing the upper limit of efficiency.

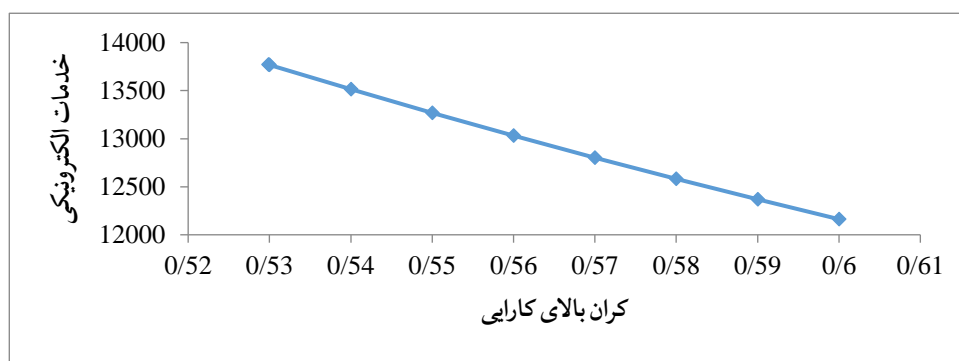


شکل ۱۴- روند تغییرات شاخص ورودی مطالبات معوق در ازای افزایش کران بالای کارایی.

Figure 14- The trend of changes in the input index of deferred claims in exchange for increasing the upper limit of efficiency.



شکل ۱۵- روند تغییرات شاخص ورودی پرداخت های انگیزشی در ازای افزایش کران بالای کارایی.  
 Figure 15- The trend of changes in the input index of incentive payments in exchange for increasing the upper limit of efficiency.



شکل ۱۶- روند تغییرات شاخص ورودی خدمات الکترونیکی در ازای افزایش کران بالای کارایی.  
 Figure 16- The trend of changes in the input index of electronic services in exchange for increasing the upper limit of efficiency.

## ۵- نتیجه گیری

در مدل های *DEA* اولیه، فرض می شود که تمامی داده های ورودی و خروجی به صورت مقادیر ثابت و مثبت به صورت پیوسته در اختیار است؛ اما در عمل همیشه این امکان وجود ندارد که مقادیر داده ها به صورت قطعی در اختیار باشد.

هم چنین ممکن است مقادیر بعضی داده ها موجود نباشد. از این رو، یکی از مسائلی که در سال های اخیر در *DEA* مطرح می شود مساله تخمین خروجی ها است. از مدل های *DEA* می توان برای تخمین سطوح خروجی (ورودی) یک واحد تصمیم گیرنده، هنگامی که همه یا بعضی از سطوح ورودی (خروجی) آن افزایش می یابد با فرض ثابت ماندن کارایی و یا بهبود کارایی بهره برد. مدل های *DEA* معکوس با فرض ثابت ماندن کارایی به تخمین سطوح خروجی به هنگام افزایش سطوح ورودی می پردازند.

در این پژوهش، برای تخمین سطوح خروجی، دو مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه ارایه شد که با حل آن سطوح خروجی یا به عبارتی کران های بالا و پایین بازه های جدید سطوح خروجی تخمین زده شد. ترکیب رویکردهای پیشین تحلیل پوششی داده ها در این مطالعه، ضمن افزایش سطوح خروجی، کاهش یا عدم تغییر آن ها را نیز شامل شد. مدل پیشنهادی برای تخمین سطوح ورودی به هنگام تغییر (افزایش، کاهش یا عدم تغییر) سطوح خروجی با داده های بازه ای عملکرد مناسبی دارد.

به منظور بررسی مدل پیشنهادی در این پژوهش، یک مطالعه موردی در ۲۴ شعبه از شعب بانک سامان در سطح تهران در نظر گرفته شد. چهار شاخص هزینه، مطالبات معوق، پرداخت های انگیزشی و خدمات الکترونیکی به عنوان شاخص های ورودی و چهار شاخص میزان جذب مشتری جدید، درآمدها، سپرده ها، و بهره وری *ATMs* به عنوان شاخص های خروجی برای هر یک از شعب تحت بررسی در نظر گرفته شد. داده های هر یک از این شاخص ها به صورت بازه ای فرض شد. با حل مدل ها، میزان کران های بالا و پایین کارایی ورودی محور هر یک از این شعب در مقایسه با یکدیگر تعیین و واحدهای کارا و ناکارا و نیز واحدهایی که اظهار نظر دقیق در مورد آن ها امکان پذیر نبود، مشخص شد.



- [1] Navabakhsh, M., Lotfi, F. H., Allahviranloo, T., Balf, F. R., & Rezai, H. Z. (2007). The outputs estimation and improvement of efficiency on interval data in DEA. *International journal of contemporary mathematical sciences*, 2(4), 195–201.
- [2] Hadi-Vencheh, A., & Foroughi, A. A. (2006). A generalized DEA model for inputs/outputs estimation. *Mathematical and computer modelling*, 43(5–6), 447–457.
- [3] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society series a: statistics in society*, 120(3), 253–281.
- [4] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444.
- [5] O'neal, P. V., Ozcan, Y. A., & Ma, Y. (2002). Benchmarking mechanical ventilation services in teaching hospitals. *Journal of medical systems*, 26, 227–240.  
<https://link.springer.com/article/10.1023/A:1015058217867>
- [6] Simar, L., & Wilson, P. W. (2000). Statistical inference in nonparametric frontier models: the state of the art. *Journal of productivity analysis*, 13, 49–78.  
<https://link.springer.com/article/10.1023/a:1007864806704>
- [7] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., & others. (2007). *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software* (Vol. 2). Springer.
- [8] Kuosmanen, T., & others. (2002). Modeling blank data entries in data envelopment analysis. *Econ-wpa working paper at wustl*, 210001. <https://core.ac.uk/download/pdf/9310547.pdf>
- [9] Kao, C., & Liu, S.-T. (2000). Data envelopment analysis with missing data: an application to university libraries in Taiwan. *Journal of the operational research society*, 51, 897–905.
- [10] Smirlis, Y. G., Maragos, E. K., & Despotis, D. K. (2006). Data envelopment analysis with missing values: an interval DEA approach. *Applied mathematics and computation*, 177(1), 1–10.
- [11] Cook, W. D., Doyle, J., Green, R., & Kress, M. (1997). Multiple criteria modelling and ordinal data: evaluation in terms of subsets of criteria. *European journal of operational research*, 98(3), 602–609.
- [12] Cook, W. D., Kress, M., & Seiford, L. M. (1996). Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. *Journal of the operational research society*, 47, 945–953.
- [13] Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA. *Management science*, 45(4), 597–607.
- [14] Kim, S.-H., Park, C.-G., & Park, K.-S. (1999). An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data. *Computers & operations research*, 26(1), 59–72.
- [15] Lee, Y. K., Park, K. S., & Kim, S. H. (2002). Identification of inefficiencies in an additive model based IDEA (imprecise data envelopment analysis). *Computers & operations research*, 29(12), 1661–1676.
- [16] Despotis, D. K., & Smirlis, Y. G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European journal of operational research*, 140(1), 24–36.
- [17] Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European journal of operational research*, 136(1), 32–45.
- [18] Jahanshahloo, G. R., Lofti, F. H., & Moradi, M. (2004). Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data. *Applied mathematics and computation*, 156(2), 463–477.
- [19] Jahanshahloo, G. R., Matin, R. K., & Vencheh, A. H. (2004). On return to scale of fully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data. *Applied mathematics and computation*, 154(1), 31–40.
- [20] Jahanshahloo, G. R., Matin, R. K., & Vencheh, A. H. (2004). On FDH efficiency analysis with interval data. *Applied mathematics and computation*, 159(1), 47–55.
- [21] Wang, Y.-M., Greatbanks, R., & Yang, J.-B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems*, 153(3), 347–370.
- [22] Wei, Q., Zhang, J., & Zhang, X. (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. *European journal of operational research*, 121(1), 151–163.
- [23] Yan, H., Wei, Q., & Hao, G. (2002). DEA models for resource reallocation and production input/output estimation. *European journal of operational research*, 136(1), 19–31.
- [24] Moradipour, P., Edalatpanah, S. A., & Sorourkhan, A. (2023). Identifying the factors affecting students' satisfaction and dissatisfaction with the university (case study: postgraduate management students of a higher education institute). *Modern research in performance evaluation*. (In Persian)  
[https://www.journal-mrpe.ir/article\\_185975.html](https://www.journal-mrpe.ir/article_185975.html)
- [25] Imeni, M., Pouresmaeil Motlagh, B., Pirouz, F., & Shemshad, A. (2022). Choosing the best company for investment according to the financial factors in the neutrosophic environment (case study: automotive industry). *Fuzzy optimization and modeling journal*, 3(4), 9–16.
- [26] Edalatpanah, S. A. (2020). Data envelopment analysis based on triangular neutrosophic numbers. *CAAI transactions on intelligence technology*, 5(2), 94–98.